

SUR LES POINTS FIXES ET LES CYCLES RÉPULSIFS AU VOISINAGE D'UNE SINGULARITÉ ESSENTIELLE ISOLÉE À L'INSTAR DE LA MÉTHODE DE RENORMALISATION DE ZALCMAN

CLAUDI MENEGHIN

ABSTRACT. Soit g une fonction holomorphe au voisinage d'une singularité essentielle isolée v : nous prouvons que, si g y omet une valeur complexe, alors v peut être approché par une suite de points fixes répulsifs de g , dont les multiplicateurs divergent à ∞ . Nous montrons aussi que, si v n'est pas une valeur exceptionnelle au sens de Picard pour g , alors v peut être approchée par une suite de points périodiques d'ordre deux de g , ces cycles étant répulsifs (avec multiplicateurs divergeant à ∞) si v n'est pas une valeur complètement ramifiée.

1. INTRODUCTION

Soit f une fonction analytique dans une région du plan complexe. Soit $f^{\circ p}$ l'itéré p -ième de f , c'est-à-dire, définissons $f^{\circ 2}(z) := f(f(z))$ et, pour $p \in \mathbb{N}$, $f^{\circ p}(z) := f(f^{\circ(p-1)}(z))$ (lorsque ces quantités sont bien définies).

Un point z_0 est dit un *point périodique de période p* de f si p est un entier naturel tel que $f^{\circ p}(z_0)$ est bien défini et $f^{\circ p}(z_0) = z_0$.

Si p est le plus petit nombre naturel tel que $f^{\circ p}(z_0) = z_0$, alors le point z_0 est appelé un *point périodique de période minimale p* . L'ensemble

$$\{z_0, f(z_0), f^{\circ 2}(z_0), \dots, f^{\circ(p-1)}(z_0)\}$$

est appelé un *cycle de points périodiques*. La valeur $A := (f^{\circ p})'(z_0)$ est appelée le *multiplicateur* du point périodique z_0 . Un cycle de période minimale 1 est appelé un *point fixe*. Un cycle (y compris les points fixes) est dit *répulsif* si $|A| > 1$.

Bergweiler a prouvé [3] que, pour tout $n > 1$, toute fonction entière transcendante a une suite de n -cycles répulsifs à multiplicateurs divergeant à ∞ . Dans cette note, nous prouvons un résultat en corrélation:

Soient $v \in \mathbb{C}$, W un voisinage fermé de v , g une fonction holomorphe sur $W \setminus \{v\}$, ayant une singularité essentielle à v . S'il existe une valeur complexe α omise par g sur $W \setminus \{v\}$, alors il existe une

Received February 11, 2010; in revised form January 24, 2011.

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 37F25; Secondary, 37F05.

Key words and phrases. Essential singularities, repulsive fixpoints, multiplier, iteration, holomorphic dynamics.

suite $\{q_n\} \rightarrow v$ de points fixes répulsifs de g , dont les multiplicateurs divergent à ∞ (Théorème 3.1). En outre (Théorème 3.2), si v n'est pas une valeur exceptionnelle au sens de Picard pour g , alors v peut être approchée par une suite de points périodiques d'ordre deux de g , ces cycles étant répulsifs (avec multiplicateurs divergeant à ∞) si v n'est pas une valeur complètement ramifiée.

La preuve de ce résultat utilise de façon essentielle la méthode de renormalisation de Zalcman (voir e.g. [10]): cette technique a désormais une vaste gamme d'applications; par exemple Schwick [9] l'a utilisée pour simplifier la preuve de Baker [1] que l'ensemble de Julia d'une fonction entière transcendante est la fermeture de l'ensemble des points périodiques répulsifs. Pourtant, dans cet article, nous ne l'utiliserons pas pour enquêter sur l'ensemble de Julia des fonctions analytiques, mais sur leur dynamique au voisinage d'une singularité essentielle isolée. Notons en outre que les Théorèmes 3.1 et 3.2 sont de toute façon purement locaux: en d'autres mots ils ne demandent que les fonctions concernées soient analytiques sur \mathbb{C} .

L'adaptation de la méthode de Zalcman utilise un théorème de Lehto et Virtanen sur la croissance de la dérivée sphérique au voisinage d'une singularité essentielle isolée (Théorème 2.1, voir [8, 6]) ainsi que une généralisation (Lemme 2.2) du lemme de l'espace métrique de Gromov (voir [5], p. 256).

La preuve du Théorème 3.1 consiste essentiellement à composer g à la source avec une suite de contractions bien choisies, ce qui permet de construire une fonction holomorphe entière limite; on conclut en appliquant les théorèmes de Picard, Hurwitz (voir [4], p.8) et des quatre valeurs complètement ramifiées (voir [2], th. 29 et 30).

2. PRÉLIMINAIRES

Rappelons d'abord qu'une fonction méromorphe f est dite *faiblement normale* sur un domaine D si, pour chaque sous-domaine simplement connexe $G \subset D$, la famille $\{f \circ S\}_{S \in \text{Aut}(G)}$, indexée sur les automorphismes de G , est normale; soit $f^\#$ la dérivée sphérique de f . On a:

Théorème 2.1. *Soit $v \in \mathbb{C}$, W un voisinage de v in \mathbb{C} ; soit g une fonction holomorphe $W \setminus \{v\} \rightarrow \mathbb{C}$, ayant une singularité essentielle isolée à v et omettant une valeur complexe α au voisinage de v . Alors $\limsup_{z \rightarrow v} |z - v| \cdot g^\#(z) = \infty$.*

Démonstration. Grâce au théorème d'Iversen, la valeur α est une valeur asymptotique de g ; grâce au Théorème 2 en [8] (voir aussi [7], point 7), g n'est pas faiblement normal en $W \setminus \{v\}$; la thèse s'ensuit alors du Théorème 2 de [7]. \square

Le lemme suivant est une version renforcée du lemme de l'espace métrique (voir [5], p. 256), nécessaire pour la démonstration du lemme de renormalisation 2.3:

Lemme 2.2. *Soient (X, d) un espace métrique complet, $Y \subset X$ un sous-ensemble de X tel que $X \setminus \overline{Y} \neq \emptyset$ et $M : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction localement bornée sur $X \setminus \overline{Y}$.*

Soit $\sigma > 0$: alors, pour tout $u \in X$ tel que $d(Y, u) > 2/\sigma M(u)$ il existe $w \in X$ tel que:

$$(2.1) \quad d(u, w) \leq [\sigma M(u)]^{-1}$$

$$(2.2) \quad M(w) \geq M(u)$$

$$(2.3) \quad \overline{D}(w, [\sigma M(w)]^{-1}) \cap Y = \emptyset$$

$$(2.4) \quad d(x, w) \leq [\sigma M(w)]^{-1} \Rightarrow M(x) \leq 2M(w).$$

Démonstration. $u \in X \setminus \overline{Y}$ étant donné, tel que $d(Y, u) > 2/\sigma M(u)$, supposons par l'absurde qu'il n'existe pas le w du lemme. Alors $v_0 := u$ n'est pas convenable en tant que choix de w . Par contre, $w = u$ vérifie automatiquement (2.1), (2.2) et (2.3), donc il doit violer la condition (2.4). Ainsi on peut trouver $v_1 \in X$ tel que $M(v_1) > 2M(v_0)$ et $d(v_1, v_0) \leq [\sigma M(v_0)]^{-1}$.

Par conséquent, v_1 aussi vérifie l'hypothèse du lemme, car $d(Y, v_1) \geq d(Y, v_0) - d(v_1, v_0) \geq 2[\sigma M(v_0)]^{-1} - [\sigma M(v_0)]^{-1} = [\sigma M(v_0)]^{-1} > 2[\sigma M(v_1)]^{-1}$.

Par induction, on peut ainsi construire une suite $\{v_n\}$ telle que $v_0 = u$, $M(v_{n+1}) > 2M(v_n)$ mais $d(v_n, v_{n+1}) \leq [\sigma M(v_n)]^{-1}$; par conséquent,

$$(2.5) \quad M(v_n) \geq 2^n M(v_0)$$

$$(2.6) \quad d(v_n, v_{n+1}) \leq [2^n \sigma M(v_0)]^{-1}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} d(v_n, v_{n+k}) &\leq \sum_{l=n}^{n+k-1} d(v_l, v_{l+1}) < \sum_{l=n}^{\infty} d(v_l, v_{l+1}) \leq \\ &\leq [\sigma M(v_0)]^{-1} \sum_{l=n}^{\infty} 2^{-l} = [\sigma M(v_0)]^{-1} 2^{1-n}, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que la suite $\{v_n\}$ est de Cauchy.

En soit λ la valeur limite: en rappelant que $v_0 = u$, on a

$$d(u, \lambda) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(v_0, v_k) \leq 2[\sigma M(u)]^{-1},$$

ce qui entraîne $d(Y, \lambda) \geq d(Y, u) - d(u, \lambda) > 0$, car $d(Y, u) > 2[\sigma M(u)]^{-1}$. Ainsi $\lambda \notin \overline{Y}$; par contre, grâce à (2.5), M n'est pas borné au voisinage de λ : c'est une contradiction. \square

Le lemme suivant 'renormalise', à l'instar de la méthode de Zalcman, une fonction holomorphe g au voisinage d'une singularité essentielle isolée. En effet, on procédera en composant g avec un suite de contractions; pourtant, on ne sera pas concerné avec une famille pas normale de fonctions méromorphes, mais avec une seule fonction à singularité essentielle isolée.

Lemme 2.3. *Soient $v \in \mathbb{C}$, W un voisinage fermé de v , g une fonction holomorphe sur $W \setminus \{v\}$, ayant une singularité essentielle à v . Alors il existe des*

suites $\{v_n\} \rightarrow v$, $\{r_n\} \subset \mathbb{R}^+$, avec $\{r_n\} \rightarrow 0$, telles que $\{g(v_n + r_n z)\}$ converge uniformément sur tout compact de \mathbb{C} vers une application holomorphe non constante $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. En outre, si g ne prend pas la valeur $\alpha \in \mathbb{C}$ sur $W \setminus \{v\}$, alors h ne prend pas la valeur α non plus.

Démonstration. Grâce au Théorème 2.1, on peut trouver des suites $\{\lambda_n\} \rightarrow +\infty$ en \mathbb{R} et $\{\xi_n\} \rightarrow v$ en $W \setminus \{v\}$ telles que

$$(2.7) \quad |\xi_n - v| \cdot g^\sharp(\xi_n) = \lambda_n.$$

Pour tout n , le Lemme 2.2 est applicable à W avec la métrique euclidéenne, $Y = \{v\}$, $M(x) = g^\sharp(x)$, $u = \xi_n$ et $\sigma = 3/\lambda_n$: en effet, grâce à (2.7),

$$d(Y, u) = |\xi_n - v| = \frac{\lambda_n}{g^\sharp(\xi_n)} = \frac{3}{\sigma g^\sharp(\xi_n)} > \frac{2}{\sigma g^\sharp(\xi_n)} = \frac{2}{\sigma M(u)}.$$

On obtient $v_n \in W$ tel que:

$$(2.8) \quad |\xi_n - v_n| \leq \frac{\lambda_n}{3g^\sharp(\xi_n)} = |\xi_n - v|$$

$$(2.9) \quad g^\sharp(v_n) \geq g^\sharp(\xi_n)$$

$$(2.10) \quad \overline{\mathbb{D}}(v_n, \frac{\lambda_n}{3g^\sharp(v_n)}) \cap \{v\} = \emptyset$$

$$(2.11) \quad |x - v_n| \leq \frac{\lambda_n}{3g^\sharp(v_n)} \Rightarrow g^\sharp(x) \leq 2g^\sharp(v_n).$$

Par conséquent, $v_n \rightarrow v$ car, grâce à (2.8), $|v_n - v| \leq |\xi_n - v_n| + |\xi_n - v| \leq \frac{4}{3} |\xi_n - v|$.

Posons maintenant $r_n := [3g^\sharp(v_n)]^{-1}$ et $h_n(z) := g(v_n + r_n z)$: on voit sur (2.10) que

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{D}(0, \lambda_n) &\Rightarrow v_n + r_n z \in \mathbb{D}\left(v_n, \frac{\lambda_n}{[3g^\sharp(v_n)]}\right) \\ &\subset W^\circ \setminus \{v\}, \end{aligned}$$

pour n suffisamment grand (ce que nous sous-entendrons dans la suite).

Grâce à (2.9) et (2.10), chaque h_n est bien défini sur $\mathbb{D}(0, \lambda_n)$.

La famille $\{h_n\}$ est normale, car, grâce à (2.11):

$$(2.12) \quad z \in \mathbb{D}(0, \lambda_n) \Rightarrow h_n^\sharp(z) = g_n^\sharp\left(v_n + \frac{z}{[3g^\sharp(v_n)]}\right) [3g^\sharp(v_n)]^{-1} \leq 2.$$

Grâce au théorème d'Ascoli, et au fait que $\{\lambda_n\} \rightarrow \infty$, on peut extraire de $\{h_n\}$ une sous-suite uniformément convergente (que nous appellerons une fois de plus $\{h_n\}$) sur tout compact de \mathbb{C} vers une application méromorphe limite h . Cette application jouit de la propriété que

$$h^\sharp(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n^\sharp(0) = 1/3,$$

ce qui prouve qu'elle n'est pas constante. Comme, pour tout n , h_n ne prend pas la valeur ∞ sur $\mathbb{D}(0, \lambda_n)$, grâce au lemme de Hurwitz, h ne prend pas la valeur ∞ : c'est donc holomorphe.

Finalement, si g ne prend pas la valeur α sur $W \setminus \{v\}$, alors, pour tout n , h_n ne prend pas la valeur α sur $\mathbb{D}(0, \lambda_n)$ et, grâce une fois de plus au lemme de Hurwitz, h ne prend pas la valeur α . \square

Remarque 2.4. On voit facilement sur (2.12) que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $h^\sharp(z) \leq 2$. Nous n'utiliserons pas cette propriété dans cet article.

Enfin, on aura besoin d'une extension immédiate du Théorème 31 de [2]:

Théorème 2.5. *Pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$, toute application holomorphe non constante de $h : \mathbb{C} \setminus \{\zeta\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{\zeta\}$ n'a pas de valeurs complètement ramifiées.*

Démonstration. Si h est transcendante, c'est une conséquence immédiate des deux théorèmes fondamentaux de la théorie de Nevanlinna, voir le Théorème 31 de [2]. Si par contre h est un polynôme, alors on a $h(z) = \alpha(z - \zeta) + \zeta$ car sinon h prendrait la valeur ζ pour $z \neq \zeta$, ainsi $h'(z) \equiv \alpha \neq 0$. \square

3. LES RÉSULTATS PRINCIPAUX

Théorème 3.1. *Soient $v \in \mathbb{C}$, W un voisinage fermé de v , g une fonction holomorphe sur $W \setminus \{v\}$, ayant une singularité essentielle à v . S'il existe une valeur complexe α omise par g sur $W \setminus \{v\}$, alors il existe une suite $\{q_n\} \rightarrow v$ de points fixes répulsifs de g , dont les multiplicateurs divergent à ∞ .*

Démonstration. A) Considérons d'abord le cas $\alpha \neq v$: grâce au Lemme 2.3, on trouve des suites $\{v_n\} \rightarrow v$ et $\{r_n\} \downarrow 0$ telles que $h_n(z) := \{g(v_n + r_n z)\}$ converge uniformément sur tout compact de \mathbb{C} vers une fonction holomorphe entière non constante h (à valeurs en \mathbb{C}). Grâce au Lemme 2.3 h omet la valeur $\alpha \neq v$, donc, grâce au théorème de Picard, il prend la valeur v , cette valeur n'étant pas complètement ramifiée, grâce au Théorème 2.5. Ainsi, il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que

$$(3.1) \quad \begin{cases} h(z_0) = v \\ h'(z_0) \neq 0. \end{cases}$$

Or, $z \mapsto g(v_n + r_n z) - (v_n + r_n z)$ converge, après éventuelle extraction, vers $h - v$, et $h(z_0) - v = 0$, donc le lemme de Hurwitz nous passe une suite de points $\{z_n\} \rightarrow z_0$ tels que $g(v_n + r_n z_n) = (v_n + r_n z_n)$: ainsi les points $q_n := v_n + r_n z_n$ forment une suite $\{q_n\} \rightarrow v$ de points fixes de g .

Ces points sont répulsifs (pour n assez grand) car on a, d'un côté, grâce au choix de z_0 en (3.1):

$$(g \circ h)'(z_0) = h'(z_0) \cdot g'(h(z_0)) \neq 0$$

et de l'autre côté, $r_n \rightarrow 0$,

$$r_n \cdot g'(v_n + r_n z_n) = h'_n(z_n) \rightarrow h'(z_0),$$

ce qui prouve que, pour n assez grand, les q_n sont répulsifs et $g'(q_n) \rightarrow \infty$.

B) Soit maintenant $\alpha = v$, c'est-à-dire g omet la même valeur complexe v au voisinage de la singularité essentielle v .

Appliquons le Lemme 2.3 à la fonction $(g(z) - v)/(z - v)$; c'est correct, car cette fonction est holomorphe (à valeurs en \mathbb{C}) sur $W \setminus \{v\}$, a une singularité essentielle isolée en $z = v$ et ne prend pas la valeur 0 sur $W \setminus \{v\}$.

On trouve donc $\{v_n\} \rightarrow v$ et $\{r_n\} \rightarrow 0$ tels que

$$(3.2) \quad h_n(z) := \frac{g(v_n + r_n z_n) - v}{v_n + r_n z_n - v} \rightarrow h(z),$$

uniformément sur tout compact de \mathbb{C} , où h est une fonction holomorphe entière non constante. Grâce au lemme de Hurwitz h n'a pas de pôles; naturellement h n'a pas de singularités essentielles en \mathbb{C} donc on a:

$$(3.3) \quad \left| \frac{v - v_n}{r_n} \right| \rightarrow \infty$$

en (3.2), car sinon $\lim_{n \rightarrow \infty} (v - v_n)/r_n$ serait un pôle ou une singularité essentielle pour h .

Grâce au Lemme 2.3, h ne prend pas la valeur 0: grâce au théorème de Picard, h prend alors la valeur 1. Cette valeur n'est pas complètement ramifiée, grâce au Théorème 2.5. Il existe alors $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que

$$(3.4) \quad \begin{cases} h(z_0) = 1 \\ h'(z_0) \neq 0. \end{cases}$$

Le lemme de Hurwitz nous donne une suite de points $\{z_n\} \rightarrow z_0$ tels que

$$\frac{g(v_n + r_n z_n) - v}{(v_n + r_n z_n) - v} = 1;$$

ainsi les points $q_n := v_n + r_n z_n$ forment une suite $\{q_n\} \rightarrow v$ de points fixes de g . Prouvons que ces points sont répulsifs (pour n assez grand). On a, par définition:

$$g(v_n + r_n z_n) = v + (v_n + r_n z_n - v) \cdot h_n(z).$$

En dérivant en $z = z_n$ et en divisant pour r_n , on obtient

$$g'(v_n + r_n z_n) = h_n(z_n) + \left(\frac{v - v_n}{r_n} + z_n \right) h'_n(z_n).$$

Grâce à (3.3), $|(v - v_n)/r_n| \rightarrow \infty$; comme on a aussi $h_n(z_n) \rightarrow h(z_0)$ et $h'_n(z_n) \rightarrow h'(z_0) \neq 0$ (voir (3.4)), on en tire que $g'(v_n + r_n z_n) \rightarrow \infty$, ce qui conclut la démonstration. \square

Enfin, on a aussi:

Théorème 3.2. *Soient $v \in \mathbb{C}$, W un voisinage fermé de v , g une fonction holomorphe sur $W \setminus \{v\}$, ayant une singularité essentielle à v . Si v n'est pas une valeur exceptionnelle au sens de Picard de g au voisinage de v , il existe une suite $\{q_n\} \rightarrow v$ de 2-cycles de g . En outre, si v n'est pas une valeur complètement ramifiée de g , les $\{q_n\}$ peuvent être choisis répulsifs, avec multiplicateurs divergeant à ∞ .*

Démonstration. Grâce au Lemme 2.3, on trouve des suites $\{v_n\} \rightarrow v$ et $\{r_n\} \downarrow 0$ telles que $\{h_n(z)\} := \{g(v_n + r_n z)\}$ converge uniformément sur tout compact de \mathbb{C} vers une fonction holomorphe entière non constante h . Grâce à l'hypothèse sur le caractère non exceptionnel de la valeur v , l'ensemble

$$S := g^{-1}(v) \cap W^\circ \setminus \{v\}$$

est infini. Grâce aux théorème de Picard (ou de façon banale, si h est un polynôme) il existe

$$(3.5) \quad \begin{cases} z_0 \in \mathbb{C} \\ w \in S \end{cases}$$

tels que $h(z_0) = w$. Par continuité, il existe aussi un voisinage U de z_0 tel que $h(U) \subset W^\circ \setminus \{v\}$ et, par conséquent, les $g^{\circ 2}(v_n + r_n z)$ sont bien définis, pour n assez grand, sur U . Or, $z \mapsto \{g^{\circ 2}(v_n + r_n z) - (v_n + r_n z)\}$ converge, après éventuelle extraction, vers $g \circ h - v$ uniformément sur tout compact de U . Comme $g \circ h(z_0) - v = g(w) - v = 0$, le lemme de Hurwitz nous passe une suite de points $\{z_n\} \rightarrow z_0$ tels que $g^{\circ 2}(v_n + r_n z_n) - (v_n + r_n z_n) = 0$, ainsi les points $q_n := v_n + r_n z_n$ forment une suite $\{q_n\} \rightarrow v$ de 2-cycles de g . Si, de plus, v n'est pas une valeur complètement ramifiée de g , on peut choisir les $z_0 \in \mathbb{C}$ et $w \in S$ en (3.5) de façon que

$$(3.6) \quad \begin{cases} h(z_0) = w \\ h'(z_0) \neq 0 \\ g'(w) \neq 0. \end{cases}$$

En effet, comme la valeur v n'est pas complètement ramifiée, l'ensemble

$$T := \{w \in S : g'(w) \neq 0\}$$

(et, par conséquent, $h^{-1}(T)$) est infini. L'ensemble

$$\{z \in h^{-1}(T) : h'(z) \neq 0\}$$

est de même infini: cela découle, si h est transcendant, du théorème des quatre valeurs complètement ramifiées; si h est un polynôme, alors ceci s'ensuit tout simplement du fait que l'ensemble $\{z | h'(z) = 0\}$ est fini. Cela prouve (3.6): avec ce choix de w et z_0 , on a:

$$(g \circ h)'(z_0) = h'(z_0) \cdot g'(h(z_0)) \neq 0;$$

d'autre côté, $r_n \rightarrow 0$ et

$$r_n \cdot (g^{\circ 2})'(v_n + r_n z_n) = (g \circ h_n)'(z_n) \rightarrow (g \circ h)'(z_0),$$

ainsi, pour n assez grand, les q_n sont répulsifs; on a aussi $(g^{\circ 2})'(q_n) \rightarrow \infty$. □

REFERENCES

- [1] I. N. Baker, Repulsive fixpoints of entire functions, *Math. Z.* **104** (1968), 252–256
- [2] W. Bergweiler, *An introduction to complex dynamics*, Textos de matemática, Universidade de Coimbra, Série B No. 6, p. 38 (1995)
- [3] W. Bergweiler, Quasinormal families and periodic points Complex analysis and dynamical systems II, *Contemp. Math., Amer. Math. Soc.*, Providence, RI, 382 (2005), 55–63
- [4] François Berteloot, Volker Mayer, *Rudiments de dynamique holomorphe* Société Mathématique de France, EDP Sciences, 2001
- [5] M. Gromov, Foliated plateau problem: part II: harmonic maps of foliations *GAFSA* **1** (3) (1991), 253-320
- [6] Olli Lehto, The spherical derivative of meromorphic functions in the neighbourhood of an isolated singularity, *Commentarii Mathematici Helvetici* **33** (1959), p.196-205
- [7] O. Lehto and K. I. Virtanen, On the behaviour of meromorphic functions in the neighbourhood of an isolated singularity, *Ann. Acad. Sci. Fenn. - Mathematica* **240** (1957), 1-9
- [8] O. Lehto and K. I. Virtanen, Boundary behaviour and normal meromorphic functions, *Acta Math.* **97** (1957), 47-65
- [9] W. Schwik, Repelling periodic points in the Julia set, *Bull. London. Math. Soc.* **29** (1997), 314-316
- [10] L. Zalcman, Normal Families: new perspectives, *Bull. Amer. Math. Soc.* **35** (1998), 215-230

FERMO POSTA CHIASSO 1
CH-6830 CHIASSO - SWITZERLAND
E-mail address: claudi.meneghin@gmail.com